

- ۱ گزینه‌ی (۱). در عدد 2^{345} رقم یکان زوج است و عدد 5^{432} رقم یکان ۵ است. پس در حاصل ضرب رقم یکان برابر صفر خواهد بود.
- ۲ گزینه‌ی (۴). رقم یکان عدد 1375^{1996} حتماً برابر ۵ است. رقم یکان عدد 1996^{1357} نیز برابر ۶ است. پس رقم یکان برابر یک خواهد بود.

۳ گزینه‌ی (۴).

$$\begin{cases} n = 6k + 4 \\ n = 15q + 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5n = 30k + 20 \\ 4n = 60q + 12 \end{cases} \Rightarrow n = 30(k - 2q) + 8$$

- ۴ گزینه‌ی (۴). همانطور که می‌دانیم مجموع اعداد ۱ تا 1376 بر ۹ بخش پذیر است. میدانیم در هر بار به جای اعداد پاک شده باقی مانده‌ی آن‌ها را بر ۹ (که همان باقی مانده‌ی اعداد پاک شده بر ۹ است) روی تخته وجود دارد. در این صورت اگر دو عدد روی تخته باشد که یکی از آن‌ها 76 باشد، باید اولاً مجموع دو عدد بر ۹ بخش پذیر باشد ثانیاً عدد دوم از ۹ کوچک‌تر باشد. $76 = 9 \times 8 + 4$ بنابراین عدد دوم باید ۵ باشد.

- ۵ گزینه‌ی (۱). فرض کنیم عدد اولیه A باشد، برای آنکه 77 را از سمت راست آن حذف کنیم، باید A را به $\frac{a-77}{100}$ تبدیل کنیم. در این صورت خواهیم داشت:

$$\frac{a-77}{100} = a - 7601 \Rightarrow a - 77 = 100a - 760100 \Rightarrow 99a = 760023 \Rightarrow a = 7677$$

- ۶ گزینه‌ی (۲). رقم یکان اعداد 1378 و 1999 فرد است. پس رقم یکان مجموع این دو عدد زوج است و در نتیجه عدد $1378 + 1999$ بر ۲ بخش پذیر است.

- ۷ گزینه‌ی (۳). چون رقم یکان این عدد صفر است، پس بر 10 بخش پذیر است و از آنجائیکه این عدد مربع کامل است باید به 100 نیز بخش پذیر باشد. بنابراین دو رقم سمت راست این عدد صفر هستند.

۸ گزینه‌ی (۲).

$$\begin{cases} a = 8q + 6 \\ a = 7q' + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7a = 56q + 42 \\ 8a = 56q' + 8 \end{cases} \Rightarrow$$

$$8a - 7a = 56(q' - q) - 34 + 56 - 56 \Rightarrow a = 56(q' - q - 1) + 22$$

پس باقی مانده a بر ۵۶ برابر است با: ۲۲

- ۹ گزینه‌ی (۱). رقم یکان در توان‌های صحیح عدد ۹ یکی از ارقام ۱ یا ۹ می‌باشد. با توجه به زوج بودن عدد 1380 نتیجه می‌شود رقم یکان عدد 1380^{1379} برابر ۱ می‌باشد.

- ۱۰ گزینه‌ی (۱). هر صفر در سمت راست عدد به معنی وجود یک عامل $10 = (2 \times 5)$ در عدد است، پس کفایت تعداد عوامل ۵ در حاصل ضرب را بشماریم. مضارب ۵ در این حاصل ضرب عبارتند از: 70 ، 75 و 80 که در 75 دو عامل ۵ وجود دارد. پس در مجموع، چهار عامل ۵ وجود دارد و در نتیجه ۴ صفر در سمت راست عدد به وجود می‌آید.

۱۱ گزینه‌ی (۳).

$$1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times \dots \times 20$$

از هر دو عدد یکی مضرب ۲ است و از هر چهار عدد یکی مضرب ۴ و از هر هشت عدد یکی مضرب ۸ و بنابراین توان ۲ در حاصل ضرب این

۲۰ عدد به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{20}{2} = 10 \\ \frac{20}{4} = 5 \\ \frac{20}{20} = 1 \\ \frac{20}{16} = 1/4 \end{array} \right\} \Rightarrow 10 + 5 + 2 + 1 = 18$$

۱۲ گزینه‌ی (۳). در گزینه‌های ۱ و ۲ و ۴، در حاصل ضرب اعداد متوالی وجود دارد که حتماً یکی از آن‌ها زوج است و در نتیجه حاصل ضرب، حتماً زوج است. ولی در گزینه‌ی ۳، اگر k زوج باشد، $(k+1)$ و $(k+3)$ هر دو فرد هستند و حاصل ضربشان نیز فرد است.

$$3 \times 5 \times 7 = 105$$

۱۳ گزینه‌ی (۴). به تعداد هر ۲ و ۵ یک صفر ایجاد می‌شود. پس تعداد آن‌ها را می‌شماریم:

$$16^{10} = (2^4)^{10} = 2^{40}$$

$$75 = 3 \times 5^2 \Rightarrow 2^{40} \times 5^{40} = 10^{40} \Rightarrow$$

به ۴۰ صفر ختم می‌شود.

$$25^{20} = (5^2)^{20} = 5^{40}$$

۱۴ گزینه‌ی (۱)

۱۵ گزینه‌ی (۱)

۱۶ گزینه‌ی (۲)

۱۷ گزینه‌ی (۴)

۱۸ گزینه‌ی (۱)

اگر عدد را n در نظر بگیریم.

$$\begin{array}{l} \times 6 \\ \times -5 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} n = 5k + 2 \\ n = 6k' + 4 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 6n = 30k + 12 \\ -5n = -30k' - 20 \end{array} \right. +$$

$$n = 30 \frac{(k-k') - 8}{k''} \Rightarrow n = 30(k-k') - 24 \Rightarrow n = 30(k-k'-1) + 24$$

باقیمانده جدید

۱۹ گزینه‌ی (۴)

می‌دانیم تعداد مقسوم علیه‌های یک عدد مربع کامل، فرد و در غیر این صورت زوج است. حال در بین اعداد فرد هم اعداد مربع کامل وجود دارند و هم غیر از آن. بنابراین می‌تواند تعداد آن فرد یا زوج باشد.

۲۰ گزینه‌ی (۱)

$$81^4 - 69^4 = (81^2 + 69^2)(81^2 - 69^2) = (81^2 + 69^2)(81 + 69)(81 - 69) = 12k + 0$$

۲۱ گزینه‌ی (۱)

ب.م.م دو عدد همان عوامل مشترک با کم‌ترین توان و ک.م.م آن‌ها همان عوامل مشترک و غیرمشترک با بزرگ‌ترین توان می‌باشد.

۲۲ گزینه‌ی (۳)

هر دو عدد باید بر «ب.م.م» قابل قسمت باشند، در حالی که ۷۰ به ۲۸ قابل قسمت نیست.

۲۳ گزینه‌ی (۳).

عدد d باید مقسوم علیه مشترک تفاضل دو به دو اعداد ۱۳۶۳ ، ۱۳۶۹ و ۱۳۸۱ باشد و با توجه به صورت مساله بزرگ‌ترین مقدار d همان "ب.م.م" تفاضل‌ها است.

$$\left. \begin{array}{l} ۱۳۸۱ - ۱۳۶۹ = ۱۲ \\ ۱۳۸۱ - ۱۳۶۳ = ۱۸ \\ ۱۳۶۹ - ۱۳۶۳ = ۶ \end{array} \right\} \Rightarrow \text{ب.م.م} = d = ۶$$

۲۴ گزینه‌ی (۳). در گزینه‌ی ۱ و ۲ با a با ۵ و نیز b با ۳ هر دو در صورت‌یا مخرج هستند و با همدیگر ساده نمی‌شوند. گزینه‌ی ۴ نیز لزوماً

صحیح نیست؛ چرا که در آن صورت داریم: $\frac{۵a}{k۵a} = \frac{۱}{k}$ که لزوماً عدد صحیحی نمی‌باشد. در گزینه‌ی ۳ داریم: (عدد صحیح) $\frac{k^۳b}{۳b} = k$

۲۵ گزینه‌ی (۴).

عددی که مجموع ارقام آن ۱۲ باشد بر ۳ قابل قسمت است پس نمی‌تواند عدد اول باشد.

۲۶ گزینه‌ی (۴).

برای به دست آوردن تعداد صفرها در یک عدد باید بدانیم در تجزیه‌ی آن عدد چند $(۱۰ = ۲ \times ۵)$ یافت می‌شود برای به دست آوردن تعداد ۱۰ ها باید تعداد ۵ ها را یافت (چرا که همواره در $n!$ تعداد ۲ ها از ۵ ها بیش تر است) در عدد $۱۰۰۰۰!$ باید مضارب ۵ یا ۲۵ یا ۱۲۵ و ... را پیدا کرد.

$$\left. \begin{array}{l} \text{عدد مضارب } ۵ = \frac{۱۰۰۰۰}{۵} = ۲۰۰۰ \\ \text{عدد مضارب } ۲۵ = \frac{۱۰۰۰۰}{۲۵} = ۴۰۰ \\ \text{عدد مضارب } ۱۲۵ = \frac{۱۰۰۰۰}{۱۲۵} = ۸۰ \\ \text{عدد مضارب } ۶۲۵ = \frac{۱۰۰۰۰}{۶۲۵} = ۱۶ \end{array} \right\} \text{جمعاً } ۲۴۹۹ \text{ عامل } ۵ \text{ داریم}$$

$$\text{عدد مضارب } ۳۱۲۵ = \frac{۱۰۰۰۰}{۳۱۲۵} \approx ۳$$

$$۲۰^{۱۰۰} + ۲۰^{۱۰۲} + ۳۱۲۵^۴ + \dots + ۲۰^{۱۰۰}$$

$$\begin{aligned} & (۲۰^۲)^{۵۰} + (۲۰^۲)^{۵۱} + (۲۰^۲)^{۵۲} + \dots + (۲۰^۲)^{۱۰۰} \\ & = (۴۰۰)^{۵۰} + (۴۰۰)^{۵۱} + (۴۰۰)^{۵۲} + \dots + (۴۰۰)^{۱۰۰} \\ & = (۳۹۹ + ۱)^{۵۰} + (۳۹۹ + ۱)^{۵۱} + (۳۹۹ + ۱)^{۵۲} + \dots + (۳۹۹ + ۱)^{۱۰۰} \end{aligned}$$

$$۳۹۹ \text{ باقی مانده بر } ۵۱ \Rightarrow ۱ + ۱ + ۱ + \dots + ۱ = ۵۱$$

۲۷ گزینه‌ی (۴).

۲۸ گزینه‌ی (۳). اگر عدد مزبور را x بگیریم داریم:

$$x = ۸k + ۳ \Rightarrow \text{باقی مانده‌ی تقسیم بر } ۸ \text{ برابر } ۳ \text{ است}$$

$$x = ۹k' + ۵ \Rightarrow \text{باقی مانده‌ی تقسیم بر } ۹ \text{ برابر } ۵ \text{ است}$$

$$\begin{cases} x=8k+3 \\ x=9k'+5 \end{cases} \rightarrow 8k+3=9k'+5$$

$$k+k'=13 \Rightarrow k'=13-k \Rightarrow 8k+3=9(13-k)+5 \Rightarrow -17k=-119 \Rightarrow \begin{cases} k=7 \\ x=8 \times 7+3=59 \end{cases}$$

۲۹ گزینه‌ی (۲). چون باقی‌مانده‌ی یک عدد بر ۴۲ باید بین ۰ تا ۴۱ باشد داریم:

$$\rightarrow \times(-1) \begin{cases} -6a=-42k-36 \\ 7a=42k'+7 \end{cases} +$$

$$\begin{cases} a=42(k'-k)-29 \\ a=42(k'-k)-42+13 \\ a=42(k'-k-1)+13 \\ a=42k''+13 \Rightarrow x=13 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a=7k+6 \xrightarrow{\times 6} 6a=42k+36 \\ a=6k'+1 \xrightarrow{\times 7} 7a=42k'+7 \\ a=42k''+x \end{cases}$$

باقیمانده

۳۰ گزینه‌ی (۲). چون تفاضل دو عدد، عدد فردی شده است لذا یکی از آن‌ها لزوماً زوج و دیگری فرد خواهد بود. چون تنها عدد زوج اول (۲) می‌باشد لذا حتماً $p_2 = 2$ ، داریم:

$$p_1^2 - p_2^2 = 96717$$

$$p_1^2 - 2^2 = 96717 \Rightarrow p_1^2 = 96717 + 4 = 96721 \Rightarrow p_1 = \sqrt{96721} = 311$$

$$p_2^2 + 311 = 4 + 311 = 315$$

۳۱ گزینه‌ی (۴).

$$\frac{4^{1384} + 4^{1385} + 4^{1386} + 4^{1387}}{340} = \frac{4^{1384}(1+4+16+64)}{340} = \frac{4^{1384}(85)}{85 \times 4} = 4^{1383} = 2^{2766}$$

۳۲ گزینه‌ی (۲).

$x = 2^5 \times 9^3 \times 5^3 \times 3^4 \times b = 2^5 \times 3^6 \times 5^3 \times 3^4 \times b = 5^3 \times 3^{10} \times 2^5 \times b$
برای آن‌که x مربع کامل باشد، باید همه‌ی اعداد اول توان‌های زوج داشته باشند. پس عدد b باید حتماً یک عامل ۲ و یک عامل ۵ داشته باشد، یعنی کوچک‌ترین مقدار آن $b = 10$ است.

$$2^4 \times 5^3 \times 7 = 2 \times 7 \times 10^3 = 14 \times 10^3 = 14000$$

۳۳ گزینه‌ی (۲).

۳۴ گزینه‌ی (۳). اگر باقی‌مانده‌ی توان‌های ۳ بر ۱۰ را بررسی کنیم، داریم:

$$3^1 = 3 \rightarrow 3, \quad 3^2 = 9 \rightarrow 9, \quad 3^3 = 27 \rightarrow 7, \quad 3^4 = 81 \rightarrow 1$$

و پس از این باقی‌مانده‌ها به ترتیب ۴ تایی تکرار می‌شوند. ۲۴ مضرب ۴ است، پس باقی‌مانده‌ی 3^{24} بر ۱۰، همان باقی‌مانده‌ی 3^4 بر ۱۰ است، یعنی مساوی (۱) است. برای پیدا کردن باقی‌مانده‌ی 24^3 ، کافی است باقی‌مانده‌ی $4^3 = 64$ را بر ۱۰ پیدا کنیم که برابر است با ۴، با توجه به ۲ نتیجه‌ی فوق، باقی‌مانده‌ی A بر ۱۰ برابر است با: $1 + 4 = 5$

۳۵ گزینه‌ی (۳). می‌دانیم تعداد مقسوم‌علیه‌های یک عدد که تجزیه‌ی آن به صورت $p^x \times q^y \times \dots \times k^m$ است، برابر $(x+1)(y+1)\dots(m+1)$ می‌باشد. برای آن‌که یک عدد طبیعی $18 = 2 \times 9$ مقسوم‌علیه داشته باشد، باید حاصل ضرب فوق عدد ۱۸ را تولید کند. با امتحان کردن گزینه‌ها می‌توان به راحتی دید که $180 = 2^2 \times 3^2 \times 5$ ، همین تعداد مقسوم‌علیه را دارد.

۳۶ گزینه‌ی (۳). با توجه به آن که $30^2 - 1 = 900 - 1 = 899$ ، اولین مربع کامل بزرگ‌تر از 30^2 است. هم‌چنین چون $50^2 + 1 = 2500 + 1 = 2501$ ، آخرین مربع کامل کوچک‌تر از 50^2 می‌باشد. پس مربع‌های کامل بین دو عدد ۸۹۹

و ۲۵۰۱ عبارت‌اند از:

$$۳۰^۲, ۳۱^۲, ۳۲^۲, \dots, ۵۰^۲$$

$$۵۰ - ۳۰ + ۱ = ۲۱$$

که تعداد آن‌ها برابر است با:

۳۷ گزینه‌ی (۲). چون $\frac{۸۵}{۳} \approx ۲۸/۳$ ، بین ۱ تا ۸۵، تعداد ۲۸ عدد مضرب ۳ وجود دارد. هرکدام از این اعداد یک واحد به توان عدد ۳ اضافه می‌کنند. همچنین چون $\frac{۸۵}{۹} \approx ۹/۴$ ، بین این اعداد ۹ عدد مضرب ۹ وجود دارد که هرکدام یک واحد دیگر به توان ۳ اضافه می‌کنند (زیرا در هر کدام ۲ عامل ۳ وجود دارد که یکی از آن‌ها را قبلاً حساب کرده‌ایم). علاوه بر آن $\frac{۸۵}{۲۷} \approx ۳/۱$ و در نتیجه ۳ عدد مضرب ۲۷ داریم که هرکدام یک واحد دیگر به توان ۳ اضافه می‌کنند. به همین ترتیب تنها عدد مضرب ۸۱ نیز (خود ۸۱) توان ۳ را یک واحد افزایش می‌دهد. بنابراین توان ۳ در حاصل ضرب $۱ \times ۲ \times ۳ \times \dots \times ۸۵$ برابر است با:

$$۲۸ + ۹ + ۳ + ۱ = ۴۱$$

۳۸ گزینه‌ی (۳). اگر عدد سال موردنظر را x بنامیم، با توجه به فرض تست $x - ۳$ مضرب ۷، ۱۱ و ۱۳ است. یعنی مضرب $۷ \times ۱۱ \times ۱۳ = ۱۰۰۱$ است. با توجه به این که $x \geq ۲۰۰۰$ ، کوچک‌ترین عددی که می‌تواند مضرب ۱۰۰۱ باشد، عدد ۲۰۰۲ است، که در نتیجه:

$$۲۰۰۲ = x - ۳ \Rightarrow x = ۲۰۰۵$$

۳۹ گزینه‌ی (۲). با توجه به آن که عدد از ۱۳۸۶ تا رقم ۵ تشکیل شده، باقی‌مانده‌ی تقسیم آن بر ۳، مثل باقی‌مانده‌ی تقسیم مجموع ارقام آن (یعنی ۱۳۸۶×۵) بر ۳ است، که چون ۱۳۸۶ بر ۳ بخش‌پذیر است، عدد اصلی نیز بر ۳ بخش‌پذیر می‌شود. عددی که بر ۳ بخش‌پذیر باشد، باقی‌مانده‌ی تقسیم آن بر ۶، یا عدد صفر است یا عدد ۳، که در حالت اول عدد زوج و در حالت دوم عدد فرد می‌باشد. با توجه به فرد بودن عدد صورت سؤال، پاسخ صحیح عدد ۳ می‌باشد.

۴۰ گزینه‌ی (۳). اگر عدد بزرگ‌تر را x و عدد کوچک‌تر را y فرض کنیم، با توجه به دو فرض سؤال می‌توان نوشت:

$$\left. \begin{array}{l} x - y = ۱۹۹ \\ x = ۴y + ۱۰ \end{array} \right\} \Rightarrow ۴y + ۱۰ - y = ۱۹۹ \Rightarrow ۳y = ۱۸۹ \Rightarrow y = \frac{۱۸۹}{۳} = ۶۳$$

$$\Rightarrow x = ۱۹۹ + ۶۳ = ۲۶۲$$

۴۱ گزینه‌ی (۴). تعداد مقسوم‌علیه‌های یک عدد مربع کامل همواره عددی فرد است. در گزینه‌های سؤال، فقط گزینه‌ی (۴) عددی زوج است که نمی‌تواند جواب سؤال فوق باشد. گزینه‌های (۱)، (۲) و (۳) همگی بیانگر اعداد فرد هستند.

$$۴! = ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱ = ۲۴$$

۴۲ گزینه‌ی (۴).

$$۱۲ \lfloor ۱۸ = ۳۶$$

۴۳ گزینه‌ی (۱).

تعداد اعدادی که به ۱۲ و ۱۸ بخش‌پذیر نیستند = کل اعداد - تعداد اعدادی که بر ۱۲ و ۱۸ بخش‌پذیرند

$$= ۱۰۰۰ - \left\lfloor \frac{۱۰۰۰}{۱۲} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{۱۰۰۰}{۱۸} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{۱۰۰۰}{۳۶} \right\rfloor = ۱۰۰۰ - ۱۱۱ = ۸۸۹$$

۴۴ گزینه‌ی (۱).

۴۵ گزینه‌ی (۴).

۴۶ گزینه‌ی (۲).

۴۷ گزینه‌ی (۴).

۴۸ گزینه‌ی (۳).

۴۹ گزینه‌ی (۲).

۵۰ گزینه‌ی (۳).

۵۱ گزینه‌ی (۴).

۵۲ گزینه‌ی (۳).

۵۳ گزینه‌ی (۱).

۵۴ گزینه‌ی (۳).

۵۵ گزینه‌ی (۱).

۵۶ گزینه‌ی (۲).

طبق قانون چیشف تعداد عوامل عدد ۷ در $91! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \dots \times 91$ برابر است با:

$$\left\{ \begin{array}{l} 91 \div 7 = 13 \\ 91 \div 7^2 \cong 1 \end{array} \right\} \Rightarrow 13 + 1 = \boxed{14}$$

۵۷ گزینه‌ی (۴). می‌توان با بیان مثال نقض برای گزینه‌ها پاسخ‌های غلط را حذف کرد:

گزینه‌ی (۱). $c = 24, (a = 12, b = 8)$ \Leftarrow 24 مضرب (12×8) نیست.

گزینه‌ی (۲). $c^2 = 2, a = 1$ \Leftarrow $\sqrt{2}$ مضرب ۱ نیست.

گزینه‌ی (۳). $a = 3, b = 3$ \Leftarrow 3 مضرب ۹ نیست.

۵۸ گزینه‌ی (۳). تعداد مقسوم‌علیه‌های عدد 900 برابر ۲۷ و تعداد مقسوم‌علیه‌های فرد آن ۹ تا است.

۵۹ گزینه‌ی (۱).

۶۰ گزینه‌ی (۲).

۶۱ گزینه‌ی (۱).

۶۲ گزینه‌ی (۱).

واضح است که عدد مورد نظر باید بر ۵۵ بخش پذیر باشد. $5 \times 11 = 55$

اولین عدد بزرگتر از ۴۰۰ که بر ۵۵ بخش پذیر است \Rightarrow $(15 = \text{باقیمانده}) 400 \div 55 = 7$

زوج و غیرقابل قبول $= 400 + (55 - 15) = 440$

$$440 + 55 = 495$$

$$4 + 9 + 5 = 18$$

۶۳ گزینه‌ی (۴).

گزینه‌ی (۲) مربع کامل است. سه گزینه‌ی دیگر شرایط مطرح شده را دارند اما کوچکترین آن‌ها ۳۰۲۱ است.

۶۴ گزینه‌ی (۴).

راهنمایی: اگر اعدادی را که فقط ۴ مقسوم‌علیه دارند را تجزیه نمایم فقط به دو صورت p^3 یا $p^1 \times q^1$ خواهند بود.

۶۵ گزینه‌ی (۳).

۶۶ گزینه‌ی (۳).