۱ گزینه‌ی (۴).

$$\frac{n(n-۳)}{۲} = ۷n \Rightarrow n-۳ = ۱۴ \Rightarrow n = ۱۷$$

۲ گزینه‌ی (۳).

۳ گزینه‌ی (۴).

$$\frac{۷\times۶}{۲} = ۲۱$$

۴ گزینه‌ی (۲).

۵ گزینه‌ی (۳).

به هر رأس از مکعب سه یال وصل است. پس در مرحله‌ی اول سه راه در پیش داریم. اگر هر کدام از آن‌ها را انتخاب کنیم به رأس دیگری می‌رسیم و برای رسیدن به هدف فقط ۲ راه در پیش رو خواهیم داشت. در نهایت پس از انتخاب هر یک از این ۲ راه فقط یک انتخاب خواهیم داشت. بنابراین تعداد مسیرهای ممکن برابر است با:

$$۳\times۲\times۱ = ۶$$

۶ گزینه‌ی (۱).

از ۱۱ عدد فرد متوالی یکی مضرب ۱۱ است. با توجه به اینکه داریم $۱۸۱/\overline{۸۱} = \frac{۲۰۰۰}{۱۱}$ نتیجه می‌شود که ۱۸۱ مضرب ۱۱ بین ۱ و ۲۰۰۰ وجود دارد. حال از بین این ۱۸۱ عدد مضرب ۱۱ که عبارتند از $(۱۱, ۲۲, ۳۳, ۴۴, ۵۵, ۶۶, ۷۷, ۸۸, \ldots, ۱۹۹۱)$ از هر سه عدد یکی مضرب ۳ است. با توجه به اینکه $۶۰/\overline{۳} = \frac{۱۸۱}{۳}$ نتیجه می‌شود که تعداد اعدادی که مضرب ۱۱ هستند ولی مضرب ۳ نیستند برابر است با:

$$۱۸۱ - ۶۰ = ۱۲۱$$

۷ گزینه‌ی (۱). در انتخاب این عدد سه رقمی به‌جای سه انتخاب فقط دو انتخاب داریم زیرا با انتخاب مثلاً رقم یکان، دیگر انتخابی روی رقم صدگان نخواهیم داشت. این اعداد را به دو دسته تقسیم می‌کنیم دسته‌ی اول آن‌هایی که رقم یکانشان ۲ واحد از رقم صدگانشان بیش‌تر است. تعداد این اعداد برابر است با: $۵۶ = ۱\times۸\times۷$ زیرا رقم صدگان فقط می‌تواند یکی از اعداد $(۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷)$ باشد و بنابراین به ۷ حالت قابل انتخاب است و در اینصورت با انتخاب رقم صدگان، رقم یکان نیز انتخاب می‌شود و برای انتخاب رقم دهگان فقط ۸ انتخاب باقی می‌ماند زیرا قرار است ارقام تکراری نباشد. اما دسته دوم اعدادی که رقم صدگانشان ۲ واحد از رقم یکانشان بیش‌تر است. تعداد این اعداد برابر است با $۶۴ = ۸\times۸\times۱$ و در مجموع تعداد این اعداد برابر است با: $۱۲۰ = ۵۶ + ۶۴$

۸ گزینه‌ی (۳).

از ۱ تا ۹، ۹ رقم بکار می‌رود. از ۱۰ به بعد اعداد دو رقمی هستند و برای هر عدد دو رقم لازم داریم بنابراین $۷۸ = \frac{۱۶۵-۹}{۲}$ و در اینصورت تعداد صفحات کتاب برابر است با:

$$۷۸ + ۹ = ۸۷$$

۹ گزینه‌ی (۳).

$$۱۴۴ - ۹ = ۱۳۵ \quad , \ ۱۳۵ = ۲\times۶۷ + ۱$$

یعنی در یک‌صد و چهل و سومین بار ۶۷ عدد دو رقمی کامل می‌شود. می‌دانیم $۷۶ = ۹ + ۶۷$ یعنی عدد ۷۶ کامل می‌شود و حال عدد ۷ از ۷۷ برداشته خواهدشد.

۱۰ گزینه‌ی (۱).

تعداد مقسوم‌علیه‌های یک عدد معمولاً زوج است. زیرا به ازای هر مقسوم علیه یک عدد، یک مقسوم‌علیه متقابل نیز بدست می‌آید. مثلاً ۲ مقسوم علیه ۱۲ است و بنابراین $۶ = \frac{۱۲}{۲}$ نیز مقسوم علیه دیگر ۱۲ است. اما در مورد اعداد مربع کامل مسأله متفاوت است. زیرا آن‌ها از ضرب دو عدد برابر به‌وجود می‌آیند و بنابراین تعداد مقسوم‌علیه‌های آن‌ها فرد است.

۱۱ گزینه‌ی (۲).

در انتخاب رقم یکان ۵ انتخاب و در انتخاب رقم دهگان ۴ انتخاب (زیرا صفر نمی‌تواند رقم دهگان باشد) داریم. پس طبق اصل ضرب تعداد این اعداد برابر است با:

$$۴\times۵ = ۲۰$$

۱۲ گزینه‌ی (۲).

هر صفر در سمت راست یک عدد نشان‌دهنده‌ی یک عامل ۱۰ در عدد است. که آن از ضرب دو عامل اول ۲ و ۵ بوجود می‌آید. از آنجایی که تعداد ۲ در تجزیه‌ی این حاصل‌ضرب بیش‌تر است. پس کافیست فقط تعداد ۵ در تجزیه‌ی این حاصل‌ضرب به عوامل اول را بشماریم. از هر ۵ عدد یکی مضرب ۵ و از هر ۲۵ عدد یکی مضرب ۲۵ (یعنی دارای دو عامل ۵) است. بنابراین تعداد ۵ ها برابر است با:

$$\frac{۷۹}{۵} = ۱۵/۸ \,,\, \frac{۷۹}{۲۵} = ۳/۱۶ \Rightarrow \text{تعداد ۵ها} = ۱۵ + ۳ = ۱۸$$

۱۳ گزینه‌ی (۴). فرض می‌کنیم ۲ و ۵، عضوهای مجموعه‌ی A نیستند، بنابراین مجموعه‌ی جدید فقط شامل ۳ عضو است و تعداد زیر مجموعه‌های آن برابر با ۸ است.

۱۴ گزینه‌ی (۳).

$$(\frac{۱۰}{۲} = ۵ \,,\, \frac{۱۰}{۴} = ۲/۵ \,,\, \frac{۱۰}{۸} = ۱/۲۵) \Rightarrow \text{توان عامل ۲} = ۵ + ۲ + ۱ = ۸$$

$$(\frac{۱۰}{۳} = ۳/۳ \,,\, \frac{۱۰}{۹} = ۱/۱) \Rightarrow \text{توان عامل ۳} = ۳ + ۱ = ۴$$

$$(\frac{۱۰}{۵} = ۲) \Rightarrow \text{توان عامل ۵} = ۲$$

$$(\frac{۱۰}{۷} = ۱/۴) \Rightarrow \text{توان عامل ۷} = ۱$$

$$\Rightarrow ۱ \times ۲ \times ۳ \times \ldots \times ۱۰ = ۲^{۸} \times ۳^{۴} \times ۵^{۲} \times ۷^{۱}$$

طبق اصل ضرب:

$$\text{تعداد مقسوم‌علیه‌ها} = (۸ + ۱)(۴ + ۱)(۲ + ۱)(۱ + ۱) = ۲۷۰$$

۱۵ گزینه‌ی (۲). تعداد این اعداد برابر است با تعداد کل، منهای تعداد اعدادی که بر ۵ و یا بر ۷ بخش‌پذیر هستند. در مجموعه‌ی اعداد طبیعی کوچک‌تر از ۱۰۰۰ تعداد اعدادی که بر پنج بخش‌پذیرند برابر ۱۹۹ و تعداد اعدادی که بر هفت بخش‌پذیرند برابر ۱۴۲ و تعداد اعدادی که بر هر دو (یعنی بر سی و پنج) بخش‌پذیرند برابر ۲۸ است. بنابراین طبق رابطه‌ی $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ تعداد اعدادی که یا بر پنج یا بر هفت بخش‌پذیر هستند برابر است با: ۳۱۳=۲۸−۱۴۲+۱۹۹ و در نتیجه تعداد اعدادی که نه بر پنج و نه برهفت بخش‌پذیرند برابر است با: $۹۹۹ - ۳۱۳ = ۶۸۶$

۱۶ گزینه‌ی (۴).

$$\text{تعداد حالت نشستن دور میز گرد} = (n - ۱)! = (۵ - ۱)! = ۴! = ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱ = ۲۴$$

۱۷ گزینه‌ی (۲).

۱۸ گزینه‌ی (۱).

۱۹ گزینه‌ی (۲). ابتدا عدد ۲۰۰۴ را تجزیه می‌کنیم.

$$۲۰۰۴ = ۲^{۲} \times ۳^{۱} \times ۱۶۷^{۱}$$

$$\text{تعداد مقسوم علیه ها} : \text{طبق اصل ضرب} = (۲ + ۱) \times (۱ + ۱) \times (۱ + ۱) = ۱۲$$

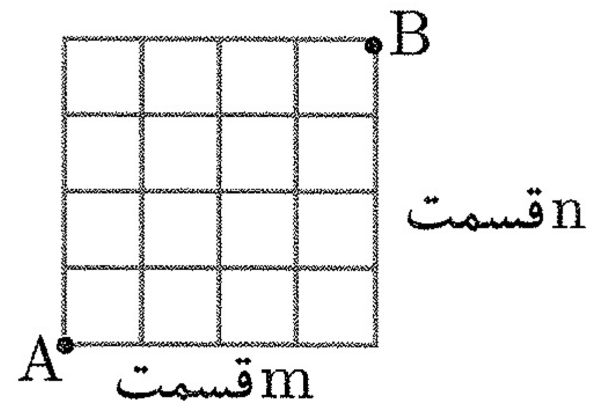
۲۰ گزینه‌ی (۴).

تعداد حالات به صف کردن n نفر برابر !n خواهد بود. با توجه به این‌که نفر اول صف مشخص است، ۴ نفر دیگر را باید به صف کرد که این کار با $۲۴ = ۱ \times ۲ \times ۳ \times ۴ = ۴!$ حالت امکان‌پذیر است.

۲۱ گزینه‌ی (۳).

$$\text{تعداد راه‌های رسیدن از A به B} = \frac{(m+n)!}{m!n!} = \frac{(۴+۴)!}{۴!۴!} = \frac{۸!}{۴!۴!} = \frac{۸\times۷\times۶\times۵\times۴!}{۴!\times۴\times۳\times۲\times۱} = ۷۰$$

مسیر تحت شرایط فوق



۲۲ گزینه‌ی (۳).

فرض کنید علی با x نفر دست داده باشد. چون همه با یکدیگر دست داده‌اند، پس کل مهمان‌ها $x+۱$ نفراند (به همراه علی) و هرکدام از این $x+۱$ نفر مانند علی با x نفر دست داده است. پس کلاً $x(x+۱)$ بار با هم دست داده‌اند، که چون هر بار با دست دادن را ۲ مرتبه شمرده‌ایم (مثلاً دست دادن علی و حسن را یک بار برای علی حساب کرده‌ایم، و یک بار برای حسن) تعداد واقعی دست دادن‌ها نصف این مقدار است. بنابراین: $\frac{x(x+۱)}{۲}=۳۶ \Rightarrow x(x+۱)=۷۲=۸\times۹ \Rightarrow x=۸$

۲۳ گزینه‌ی (۲).

بدترین حالت این است که ۳۵ مهره انتخاب کنیم و همه قرمز یا آبی باشند. ولی مهره‌ی سی و ششم قطعاً رنگ دیگری دارد و از سه رنگ مختلف مهره خواهیم داشت.

۲۴ گزینه‌ی (۴).

الف) برای آن‌که عددی بر ۲ بخش‌پذیر باشد، باید یکان آن زوج باشد، یعنی عدد ۶ باشد. تعداد چنین اعدادی برابر است با: $۶ = ۱\times۱\times۲\times۳$

ب) با توجه به آن که $۱۵ = ۵+۶+۳+۱$، همواره عدد ساخته شده بر ۳ بخش‌پذیر است. پس همه‌ی ۲۴ عدد ساخته شده بر ۳ بخش‌پذیرند. $(۲۴ = ۱\times۲\times۳\times۴)$

پ) عددی بر ۴ بخش‌پذیر است که دو رقم آخر آن بر ۴ بخش‌پذیر باشد. یعنی باید دو رقم آخر آن یا ۱۶ باشد یا ۳۶ یا ۵۶، در واقع همه‌ی اعداد زوج تولیدشده در قسمت (الف) بر ۴ بخش‌پذیرند و در این حالت نیز ۶ عدد وجود دارد که در شرط صدق می‌کنند.

ت) عددی که رقم یکان آن ۵ یا صفر باشد، بر ۵ بخش‌پذیر است که باز هم مانند قسمت (الف) تعداد آن‌ها ۶ عدد می‌شود.

با توجه به توضیحات فوق، فقط مورد (ب) نادرست است.

۲۵ گزینه‌ی (۲).

حالات انتخاب ۳ عدد از ۱۰ عدد $\{۰,۱,\ldots,۹\}$ می‌باشد. سپس هر انتخاب ۳ تایی را می‌توان از کوچک به بزرگ به یک صورت مرتب نمود.

$$C_{۳}^{۱۰} = \frac{۱۰!}{۳!۷!} = \frac{۱۰\times۹\times۸\times۷!}{۶\times۷!} = ۱۲۰$$

۲۶ گزینه‌ی (۳).

۲۷ گزینه‌ی (۳).

۲۸ گزینه‌ی (۴).

۲۹ گزینه‌ی (۲).

۳۰ گزینه‌ی (۳).

۳۱ گزینه‌ی (۱).

۳۲ گزینه‌ی (۳).

۳۳ گزینه‌ی (۲).

۳۴ گزینه‌ی (۴).

۳۵ گزینه‌ی (۳).

۳۶ گزینه‌ی (۴).

بر اساس فرض مسأله طی کردن ۶ پله باید ترکیبی از x حرکت یک پله‌ای و y حرکت دو پله‌ای باشد. به عبارتی می‌توان نوشت:

$x + 2y = 6$

با توجه به این‌که x و y یعنی تعداد حرکت ۱ پله‌ای و ۲ پله‌ای تنها جواب‌های ممکن برای x و y عبارت است از جدول زیر که مجدداً در هر حالت حرکات ۱ پله‌ای و ۲ پله‌ای نسبت به هم جایگشت دارند.

حالت	x	y	جایگشت x و y نسبت به هم در مسیر
۱	۰	۳	$\frac{3!}{3!\times 0!}=1$
۲	۲	۲	$\frac{4!}{2!\times 2!}=6$
۳	۴	۱	$\frac{5!}{4!\times 1!}=5$
۴	۶	۰	$\frac{6!}{6!\times 0!}=1$

$\Rightarrow 1+6+5+1=13$

۳۷ گزینه‌ی (۲).

۳۸ گزینه‌ی (۳).

قطعاً باید در هر مرتبه ده‌تایی ۲ رقم با بیشترین ارزش را داشته باشیم که به این ترتیب گزینه مورد نظر به دست می‌آید.

ده هزار تایی	هزار تایی	صدتایی	ده تایی	یکی
۸ و ۹	۶ و ۷	۴ و ۵	۲ و ۳	۰ و ۱

۳۹ گزینه‌ی (۴).

باید بدترین حالت ممکن را انتخاب کنیم تا مطمئن شویم از هر سه رنگ داریم یعنی از مهره‌های با تعداد بیشتر شروع به انتخاب می‌کنیم.

$$\underset{\text{قرمز}}{\underset{\Downarrow}{5}} + \underset{\text{سیاه}}{\underset{\Downarrow}{4}} + \underset{\text{سفید}}{\underset{\Downarrow}{1}} = 10$$

۴۰ گزینه‌ی (۱).

۴۱ گزینه‌ی (۴).