

۱ گزینه‌ی (۱). با محاسبه‌ی تقریبی $\sqrt{3}$ در می‌یابیم که:

$$0 < 2 - \sqrt{3} < 1 \Rightarrow 0 < (2 - \sqrt{3})^6 < 1 \Rightarrow 197 < (2 + \sqrt{3})^6 < 198 \Rightarrow \\ \frac{1}{198} < \frac{1}{(2 + \sqrt{3})^6} < \frac{1}{197} \Rightarrow \frac{1}{198} < (2 - \sqrt{3})^6 < \frac{1}{197}$$

۲ گزینه‌ی (۲). برای $n \geq 7$ داریم:

$$3^7 + 3^n = 3^7 + 3^7 \times 3^{n-7} = 3^7(1 + 3^{n-7}) = \\ \downarrow \\ 3^{n-7} + 1 = 3^{2k-1} \rightarrow n = ?, k \in \mathbb{N}$$

$3^{n-7} + 1$ یا باید ۳ باشد یا توان‌های فرد ۳ که هیچ کدام ممکن نیست. برای $n \leq 6$ نیز با امتحان کردن دید که تنها برای $n = 6$ جواب مربع کامل است.

۳ گزینه‌ی (۲).

$$x < y < 0 \Rightarrow x < y \Rightarrow 0 < y - x \checkmark$$

۴ گزینه‌ی (۲).

$$x < y \Rightarrow \frac{1}{x} > \frac{1}{y} \checkmark \quad \text{معکوس}$$

$$x^2 < y^2 \xrightarrow{\text{مثال نقض}} \begin{matrix} y = -2 \\ x = -3 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} 4 < 9 \\ 9 < 4 \end{matrix} \quad \text{همواره درست نیست}$$

$$x < y \xrightarrow{\text{هر دو منفی اند}} \frac{x}{y} > 0 \checkmark$$

۵ گزینه‌ی (۴).

۶ گزینه‌ی (۱).

۷ گزینه‌ی (۳). با توجه به اعداد مقابل نتیجه می‌شود برای اینکه رقم یکان A برابر ۳ باشد، باید باقی‌مانده‌ی a بر ۴ برابر ۲ باشد.

$$a = 1 \Rightarrow A = 11$$

$$a = 2 \Rightarrow A = 73$$

$$a = 3 \Rightarrow A = 539$$

$$a = 4 \Rightarrow A = 4177$$

۸ گزینه‌ی (۳). یک دقیقه طول می‌کشد تا قطار وارد تونل شود سپس یک دقیقه دیگر طول می‌کشد تا قطار از تونل خارج شود.

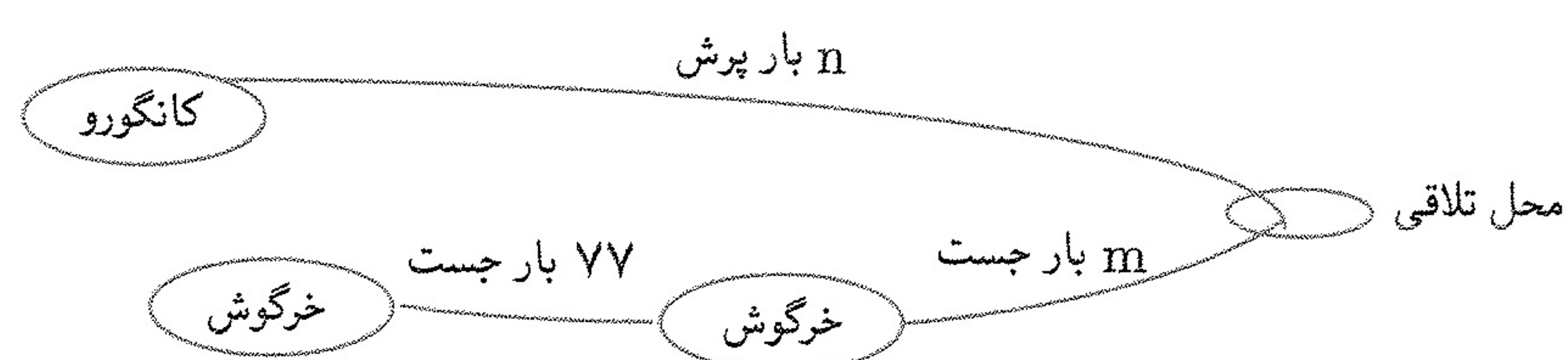
۹ گزینه‌ی (۱).

ab یک عدد منفی و ab^2 یک عدد مثبت است و حتماً یک عدد منفی از یک عدد مثبت کوچکتر است.

۱۰ گزینه‌ی (۲).

برای شمارش اعضای مجموعه آخرین عضو را به صورت $2^{1380} + 2^{1380}$ می‌نویسیم. حال باید تعداد اعضای بین ۲ و 2^{1380} را به دست آوریم. می‌دانیم تعداد طبیعی از ۱ تا 2^{1380} برابر 2^{1380} است که نصف آن‌ها زوج هستند در نتیجه تعداد اعضای مجموعه برابر است با: $\frac{1}{2} \times 2^{1380} = 2^{1379}$

۱۱ گزینه‌ی (۲).



فرض کنیم طول یک جست خرگوش برابر d و زمان جست خرگوش برابر t باشد بنابراین طول یک پرش کانگورو $\frac{1}{3}d$ و زمان یک پرش کانگورو برابر $\frac{1}{9}t$ خواهد بود. حال زمان و مسافت طی شده توسط کانگورو و خرگوش را با هم برابر قرار می‌دهیم.

$$\begin{cases} n \times \frac{1}{9}t = m \times t \\ n \times \frac{1}{3}d = (m+77)d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{9}n = m \\ \frac{1}{3}n = m+77 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{3}n = \frac{1}{9}n + 77 \Rightarrow \frac{11}{9}n = 77 \Rightarrow n = 63$$

۱۲ گزینه‌ی (۳).

$$\left. \begin{array}{l} \text{تعداد مربع با ضلع } ۱: ۴^۲ \\ \text{تعداد مربع با ضلع } ۲: ۳^۲ \\ \text{تعداد مربع با ضلع } ۳: ۲^۲ \\ \text{تعداد مربع با ضلع } ۴: ۱^۲ \end{array} \right\} \Rightarrow \text{تعداد کل مربع ها} = ۱^۲ + ۲^۲ + ۳^۲ + ۴^۲ = ۳۰$$

۱۳ گزینه‌ی (۲).

$$۰ < (1 - \sqrt{2})^x < 1 \Rightarrow ۱۱۵۳ < (1 + \sqrt{2})^x < ۱۱۵۴ \Rightarrow x = \text{بزرگترین عدد صحیح}$$

۱۴ گزینه‌ی (۲).

$$۳^۱ = ۳, ۳^۲ = ۹, ۳^۳ = ۲۷, ۳^۴ = ۸۱$$

۱۵ گزینه‌ی (۲).

$$۸۲ = ۲۰ \times ۴ + ۲ \text{ یکی است زیرا } ۳^۲ \text{ با رقم یکان } ۱۳^۸۲ \text{ رقم یکان}$$

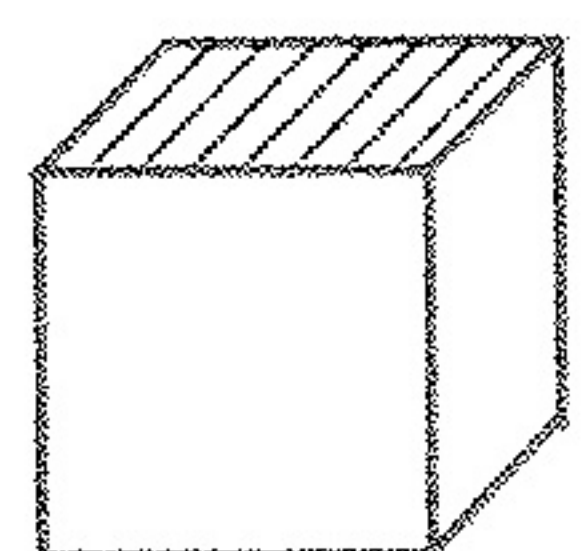
$$۶۹ = ۱۷ \times ۴ + ۱ \text{ یکی است زیرا } ۳^۱ \text{ با رقم یکان } ۱۳^۶۹ \text{ رقم یکان}$$

در نتیجه رقم یکان $۱۳^۸۲ + ۱۳^۶۹$ برابر رقم یکان $۳^۲ + ۳^۱$ است و آن برابر ۲ می‌باشد.

۱۶ گزینه‌ی (۳).

$$S = \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \frac{3}{16} + \dots = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots \right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots \right) + \dots \Rightarrow S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots = 1 + 1 = 2$$

۱۷ گزینه‌ی (۴).



۱۸ گزینه‌ی (۲). برای ۱۰° قسمت کردن هر وجه حداقل ۹ برش نیاز است. پس برای قسمت کردن هر سه وجه به ۲۷ برش

نیاز است. (وجه‌های رو به رو به وجه قسمت شده دیگر نیازی برش نخواهند داشت).

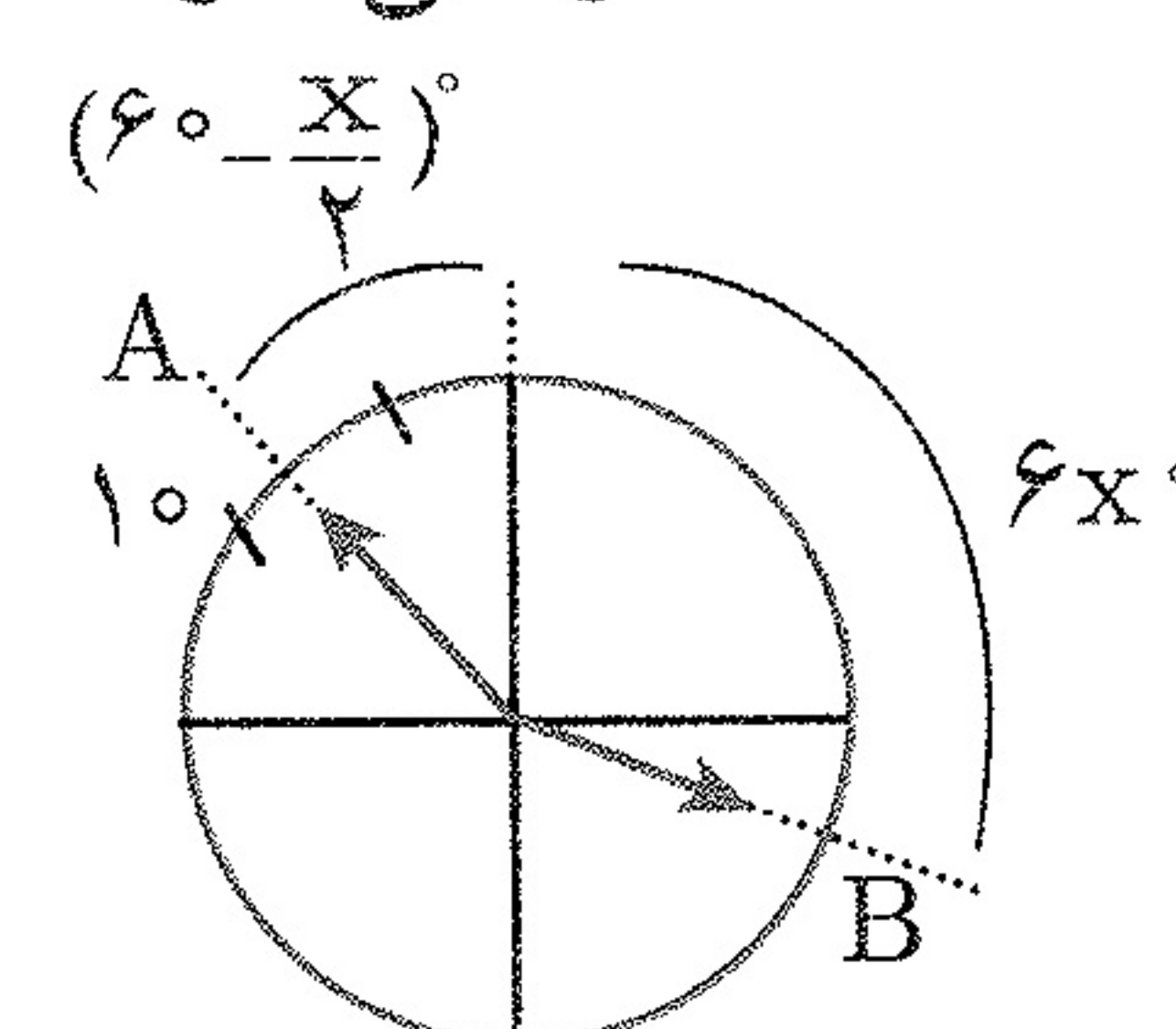
۱۹ گزینه‌ی (۳). فاصله‌ی بین زنگ‌ها $\frac{3}{2} = \frac{1}{5}$ ثانیه است. در ساعت ۶ باید ۶ زنگ زده شود و چون فاصله‌ی بین زنگ‌ها ۵ بار تکرار

می‌شود زنگ‌ها $۵ \times \frac{1}{5} = ۷/۵$ ثانیه طول خواهد کشید.

۲۰ گزینه‌ی (۲).

می‌دانیم عقربه‌ی ساعت شمار به ازای هر ۱ دقیقه $\frac{360}{60} = \frac{1}{2}^\circ$ حرکت می‌کند و عقربه‌ی دقیقه شمار نیز به ازای هر ۱ دقیقه به میزان 6° حرکت می‌کند. ۶ دقیقه‌ی دیگر عقربه‌ی دقیقه شمار در مکانی خواهد بود که با عقربه‌ی ساعت شمار (در سه دقیقه‌ی قبل) زاویه‌ی

۱۸۰° را می‌سازد.



$$۱۸۰^\circ = ۶ \text{ دقیقه‌ی قبل (B)} + ۳ \text{ دقیقه‌ی بعد (A)}$$

$$(60 - \frac{x-3}{2}) + 6x + 36 = 180 \Rightarrow 60 - \frac{x}{2} + \frac{3}{2} + 6x + 36 = 180$$

$$\frac{11x}{2} = \frac{165}{2} \Rightarrow x = 15$$

۲۱ گزینه‌ی (۱).

$$\text{ماهی} = \frac{10}{\text{سر}} \frac{x}{\text{بدن}} \frac{\frac{x}{2} + 10}{\text{دم}}$$

$$x = 10 + \frac{x}{2} + 10 \Rightarrow \frac{x}{2} = 20 \Rightarrow x = 40$$

$$= 10 + 40 + \frac{40}{2} + 10 = 50 + 20 + 10 = 80 \text{ cm طول ماهی}$$

۲۲ گزینه‌ی (۳).

فرض کنید بعد از آن که عقربه ساعت‌شمار به اندازه‌ی x واحد دقیقه‌ای جلو برود، عقربه‌ی دقیقه‌شمار به آن می‌رسد. در این صورت عقربه‌ی دقیقه‌شمار به اندازه‌ی $x + 45$ واحد جلو رفته است. ولی چون عقربه دقیقه‌شمار ۱۲ مرتبه سریع‌تر از ساعت‌شمار حرکت می‌کند داریم:

$$12x = 45 + x \Rightarrow x = 4\frac{1}{11}$$

$$45 + 4\frac{1}{11} = 49\frac{1}{11}$$

پس جواب ما چنین خواهد بود:

۲۳ گزینه‌ی (۴).

$$\text{بار اول } (\frac{100}{100} - \frac{20}{100})x = \frac{80}{100}x$$

$$\text{بار دوم } (\frac{80}{100}x + \frac{80}{100})x = \frac{160}{100}x$$

$$x \text{ آب موجود در ظرف } y \text{ مقدار آب برداشته شده در بار سوم } \frac{160}{100}x - y \text{ بار سوم}$$

بار چهارم

$$\frac{2}{3}(\frac{160}{100}x - y) = \frac{76}{100}x \Rightarrow \frac{320}{300}x - \frac{2}{3}y = \frac{76}{100}x$$

$$\Rightarrow \frac{320}{300}x - \frac{76}{100}x = \frac{2}{3}y \Rightarrow \frac{320 - 230/4}{300}x = \frac{2}{3}y$$

$$\Rightarrow \frac{89/6}{300} \times \frac{3}{2} = \frac{y}{x} \Rightarrow \frac{y}{x} = \frac{89/6}{200} = \frac{44/8}{100} \Rightarrow 44/8\%$$

۲۴ گزینه‌ی (۳).

اگر باقی‌مانده‌ی تقسیم a بر p برابر r باشد باقی‌مانده‌ی تقسیم a^n بر p ، r^n خواهد شد. (باقی‌مانده نیز به همان توان می‌رسد.)

$$A = 1^3 + 2^3 + \dots + 25^3$$

داریم:

$$\frac{A}{6} = \frac{1^3 + 2^3 + \dots + 25^3}{6} \Rightarrow \frac{A}{6} \text{ باقیمانده‌ی } (6 \text{ بر پایه})$$

$$= 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 0^3 + 1^3 + \dots + 1^3$$

$$= 4(1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3) + 1^3$$

$$= 4(1 + 8 + 27 + 64 + 125) + 1 = 901$$

که باقی‌مانده‌ی ۹۰۱ بر ۶ عدد ۱ خواهد شد.

۲۵ گزینه‌ی (۲). تعداد ارقام به کار رفته را حساب می‌کنیم.

$$\left. \begin{array}{l} ۹ \text{ رقم } \Rightarrow ۹ \rightarrow ۱ \text{ از} \\ ۹۹ \Rightarrow ۹۰ \times ۲ = ۱۸۰ \text{ رقم } \Rightarrow ۱۰ \rightarrow ۱ \text{ از} \\ ۹۹۹ \Rightarrow ۹۰۰ \times ۳ = ۲۷۰۰ \text{ رقم } \Rightarrow ۱۰۰ \rightarrow ۱ \text{ از} \end{array} \right\} \text{ رقم } ۲۸۸۹ = ۹ + ۱۸۰ + ۲۷۰۰ = \text{مجموع}$$

$$۳۹۹۳ - ۲۸۸۹ = ۱۱۰۴ \xrightarrow{\text{تعداد اعداد چهار رقمی}} \frac{۱۱۰۴}{۴} = ۲۷۶ \Rightarrow ۹۹۹ + ۲۷۶ = ۱۲۷۵$$

۲۶ گزینه‌ی (۱).

رقم یکان ۶^n همواره برابر ۶ است. پس رقم یکان همه‌ی اعداد $۶, ۶^۲, ۶^۳, \dots, ۶^{۱۳۸۵}$ برابر ۶ می‌شود و رقم یکان مجموع آن‌ها را می‌توان به‌دست آورد:

$$\underbrace{۶ + ۶ + \dots + ۶}_{۱۳۸۵ \text{ بار}} = ۶ \times ۱۳۸۵ = ۸۳۱۰ \rightarrow \text{رقم یکان صفر}$$

پس رقم یکان عدد مورد نظر برابر $۱ + ۰ = ۱$ است.

۲۷ گزینه‌ی (۳).

۲۸ گزینه‌ی (۲). وقتی که جمع چند عدد حقیقی مثبت، مقداری ثابت باشد، حداکثر حاصل ضرب آن‌ها وقتی به دست می‌آید که همه‌ی اعداد با هم برابر باشند. پس در این جا حاصل ضرب حداکثر وقتی حاصل می‌شود که هر دو عدد ۱۵ باشند که در آن صورت حاصل ضرب آن‌ها ۲۲۵ می‌شود.

۲۹ گزینه‌ی (۲). باید در ۵۵ دقیقه نصف حوض پر از آب شده باشد تا ۵ دقیقه‌ی دیگر آب حوض، دو برابر شود و کل حوض پر شود.

۳۰ گزینه‌ی (۴).

بیش‌ترین تعداد مربع را وقتی می‌توان ساخت که با ۱۲ چوب کبریت یک مکعب ساخته شود. هر مکعب ۶ وجه دارد پس حداکثر، ۶ مربع خواهیم داشت.

۳۱ گزینه‌ی (۱).

$$\frac{۳}{۷} = ۰.\overline{۴۲۸۵۷۱}$$

این عدد متناوب، دوره‌گردش ۶ تایی دارد یعنی هر عدد پس از ۵ رقم تکرار می‌شود پس چون ۸۴ بر ۶ بخش‌پذیر است آخرین رقم سمت راست برابر ۱ خواهد شد.

۳۲ گزینه‌ی (۳).

$$a = ۲$$

$$b = ۱$$

$$c = ۲$$

$$d = ۴$$

$$e = ۸, \dots, z = ۲^{n-۲} = ۲^{۲۴} = (۲^۳)^۸ = ۸^۸$$

شماره حرف انگلیسی

$$\begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \\ \hline \end{array} = ۲۶$$

۳۳ گزینه‌ی (۴).

- ۳۴ گزینه‌ی (۲)
 ۳۶ گزینه‌ی (۲)
 ۳۸ گزینه‌ی (۲)
 ۴۰ گزینه‌ی (۴)
 ۴۲ گزینه‌ی (۴)
 ۴۴ گزینه‌ی (۳)
 ۴۶ گزینه‌ی (۱)
 ۴۸ گزینه‌ی (۲)
 ۵۰ گزینه‌ی (۳)
 ۳۵ گزینه‌ی (۱)
 ۳۷ گزینه‌ی (۳)
 ۳۹ گزینه‌ی (۳)
 ۴۱ گزینه‌ی (۲)
 ۴۳ گزینه‌ی (۳)
 ۴۵ گزینه‌ی (۴)
 ۴۷ گزینه‌ی (۱)
 ۴۹ گزینه‌ی (۴)

تعداد اعداد تک رقمی غیر صفر برابر با ۹، تعداد اعداد ۲ رقمی برابر با ۹۰، تعداد اعداد سه رقمی برابر با ۹۰۰ و ... پس برای نوشتن کلیه‌ی اعداد دو رقمی $180 = 2 \times 90$ رقم نیاز است.

و تعداد صفحات دو رقمی $= 2 \div$ (تعداد ارقام به‌کار رفته در صفحات دو رقمی)

(تعداد کل ارقام به‌کار رفته) = (تعداد ارقام به‌کار رفته‌ی تک رقمی) + (تعداد ارقام به‌کار رفته در صفحات دو رقمی)

$$\Leftarrow 165 = 9 + (\text{تعداد ارقام به‌کار رفته در صفحات دو رقمی})$$

$$\Leftarrow (\text{تعداد ارقام به‌کار رفته در صفحات دو رقمی}) = 156 \Leftarrow (\text{تعداد صفحات دو رقمی}) = 78 = 156 \div 2$$

تعداد کل صفحات = صفحات تک رقمی + صفحات دو رقمی

$$\boxed{87} = 78 + 9 = \text{تعداد کل صفحات}$$

۵۱ گزینه‌ی (۴)

فاصله‌ی اعداد برابر با ۱۲ است. $\Rightarrow 27, 39, 51, 63, 75, \dots$

فاصله‌ی اعداد برابر با ۲۱ است. $\Rightarrow -12, 9, 30, 51, 72, \dots$

در چنین دنباله‌هایی از نقطه‌ای که اولین بار دو دنباله مقدار برابر دارند، مقادیر عددی دنباله‌ها در مضارب ک.م.م. فاصله‌ی اعداد، با هم یکسان می‌شوند.

$$(12 \cup 21) = \frac{12 \times 12}{3} = 48 \Rightarrow \text{دومین عدد تکراری بعدی} = 51 + 2 \times (48) = 147$$

۵۲ گزینه‌ی (۱)

اعداد ۱، ۲، ۴، ...، ۲۵۶ معادل اعداد $2^0, 2^1, 2^2, \dots, 2^8$ هستند و در صورتی که آن‌ها را در مربع 3×3 مورد نظر قرار دهیم به طوری که حاصل ضرب آن‌ها در هر سطر و ستون و قطر برابر باشند، مانند این است که مجموع توان‌های عدد ۲ در هر سطر و ستون و قطر با هم یکسان شوند. اما اعداد $2^0, 2^1, 2^2, \dots, 2^8$ را نمی‌توان در چنین مربعی با این شرط قرار داد؛ لذا به تمامی اعداد یک واحد اضافه کرده و اعداد ۱، ۲، ۳، ...، ۹ را به دست می‌آوریم یا به عبارتی تمام اعداد را در ۲ ضرب می‌کنیم. این اعداد به صورت زیر در مربع قرار می‌گیرند تا شرط برقرار شود:

اما جواب 2^{15} نیست، چون تمام اعداد در ۲ ضرب شده بودند و حال باید 2^{15} را بر 2^3 تقسیم کرد.

$$\text{و جواب برابر } \boxed{4096} = 2^{12} \text{ است.}$$

۵۳ گزینه‌ی (۲)

$$\begin{bmatrix} 4 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2^4 & 2^9 & 2^2 \\ 2^3 & 2^5 & 2^7 \\ 2^8 & 2^1 & 2^6 \end{bmatrix} \Rightarrow 2^4 \times 2^9 \times 2^2 = 2^{15}$$

۵۴ گزینه‌ی (۱).

عدد ۷ وقتی به توان اعداد طبیعی برسد به ترتیب حالت‌های (۰۷, ۴۹, ۴۳, ۰۱) در دو رقم سمت راست حاصل پدید می‌آید که اگر ۱۳۹۲ را بر ۴ تقسیم کنیم باقیمانده صفر می‌شود. یعنی دو رقم سمت راست با چهارمین عدد از اعداد بالا (۰۱) برابر است، پس رقم دهگان مساوی صفر است.

۵۵ گزینه‌ی (۲).

$$b = \text{سرعت پله‌ی برقی} \quad a = \text{سرعت سارا} \quad \text{و} \quad L = \text{طول پله برقی}$$

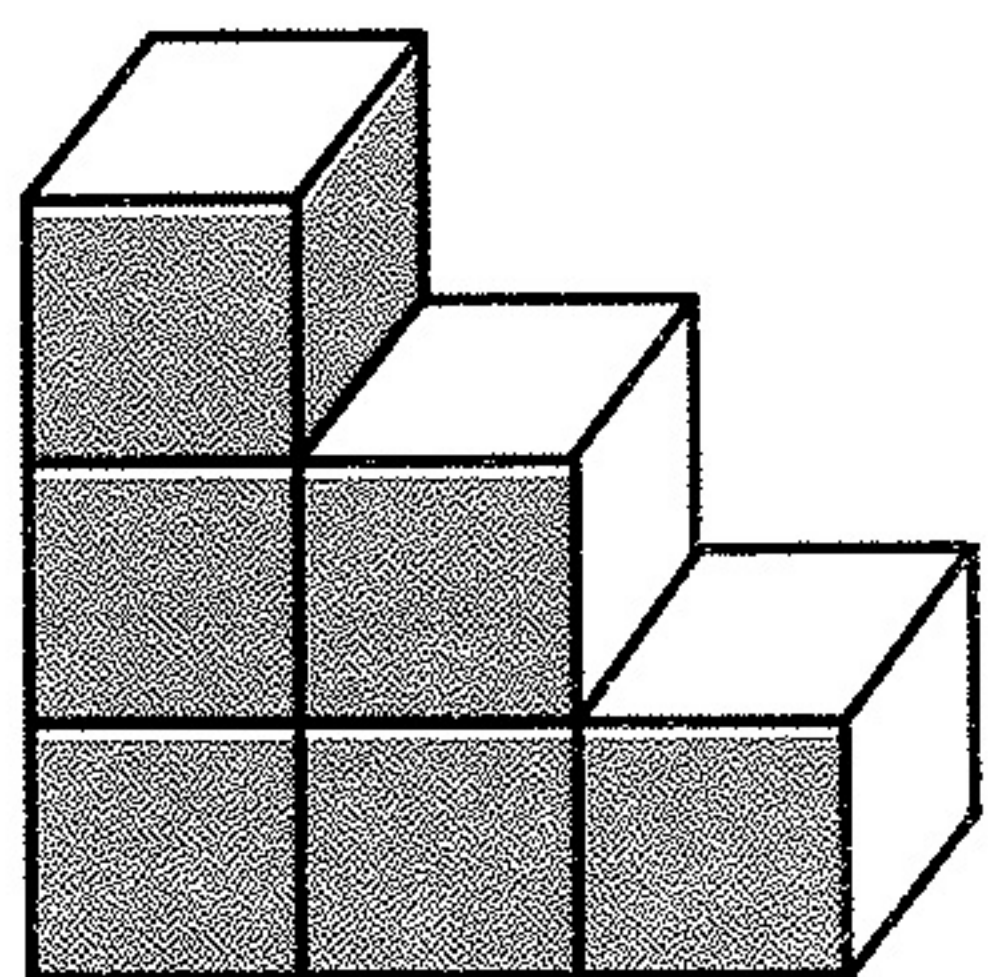
$$\left. \begin{array}{l} \Rightarrow L = 60 \times a \quad \text{سارا از پله‌ی ثابت پایین می‌آید.} \\ \Rightarrow L = 24(a + b) \quad \text{سارا از پله‌ی متحرک پایین می‌آید.} \end{array} \right\} \Rightarrow 60a = 24a + 24b$$

$$\Rightarrow 36a = 24b \Rightarrow 3a = 2b \Rightarrow$$

$$L = 60 \times \frac{2b}{3} = 40b \Rightarrow 40 \text{ ثانیه طول می‌کشد}$$

۵۶ گزینه‌ی (۲).

کلاً ۲۱ وجه (طرف) نمایان است که از این تعداد ۱۴ وجه مقابل هم قرار دارند که جمعشان حتماً ۷ است (وجه‌ها شورزده) و ۷ وجه باقیمانده برای پیدا شدن جمع حداکثری باید ۶ یا ۵ باشند مطابق شکل در نتیجه خواهیم داشت:



$$(7 \times 7) + (5 \times 6) + (2 \times 5) = 49 + 30 + 10 = 89$$

۵۷ گزینه‌ی (۲).

اردلان اعداد روبه رو را نگفته است:

بردیا اعداد روبه رو را نگفته است:

پویا اعداد روبه رو را نگفته است:

۲, ۵, ۸, ۱۱, ..., ۹۹۸

۵, ۱۴, ۲۳, ..., ۹۹۵

۱۴, ۴۱, ۶۸, ..., ۹۸۶

پس به همین ترتیب تورج، جهان، و حمید به ترتیب اعداد $41k + 81$, $122k + 243$, $365 + 729k$ را نخواهند گفت. و تنها عدد باقیمانده را خلیل بعد از حمید می‌گوید که عدد $365 = 729 \times 0 + 365$ خواهد بود.

۵۸ گزینه‌ی (۱).

۵۹ گزینه‌ی (۲).